Міністерство освіти і науки України

Національний університет
водного господарства та природокористування

Навчально-науковий механічний інститут

Кафедра транспортних технологій і технічного сервісу

02-02-121

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
з навчальної дисципліни
«Дослідження операцій в транспортних системах»
для здобувачів вищої освіти першого
(бакалаврського) рівня за спеціальністю
275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)»
денної та заочної форм навчання
(Частина 2)

Рекомендовано методичною
комісією зі спеціальності
275 «Транспортні технології
(на автомобільному транспорті)»
Протокол № 6 від 20.02.2019 р.

Рівне – 2019

Методичні вказівки до практичних занять з навчальної дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» (Частина I) для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» денної та заочної форм навчання / Кристопчук М. Є., Кучер О. О., Макарічев О. В. – Рівне : НУВГП, 2019. – 28 с.

Укладачі:

Кристопчук М. Є., к.т.н., доцент кафедри транспортних технологій і технічного сервісу; Кучер О. О., старший викладач кафедри транспортних технологій і технічного сервісу; Сорока В. С. , к.с-г.н., доцент кафедри транспортних технологій і технічного сервісу; Макарічев О. В., д.ф.-м.н., професор кафедри транспортних технологій і технічного сервісу.

Відповідальний за випуск – М. Є. Кристопчук, к.т.н., доцент, завідувач кафедри транспортних технологій і технічного сервісу.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Студенти повинні **уміти**: самостійно складати математичні моделі складних транспортних систем; застосовувати методи оптимізації для вирішення виробничих задач; застосовувати ПЕОМ і сучасні програмні продукти при вирішенні оптимізаційних задач.

Мета методичних вказівок – допомогти студентам закріпити теоретичний матеріал з дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» на основі самостійного вирішення практичних завдань.

У процесі виконання завдань студенти глибше опановують питання побудови і аналізу моделей функціонування транспортних систем, показників для оцінки ефективності транспортних операцій із застосуванням математичного інструментарію дослідження операцій, а також розвитку творчих здібностей та ініціативи при вирішенні поставлених завдань на практиці.

У методичних вказівках викладено послідовність виконання завдань. Роботу студенти виконують відповідно до варіантів, індивідуально з допоміжними розрахунками. Студенти передають викладачеві виконані завдання для перевірки з подальшим їх захистом.

1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ ТА СТРУКТУРА ЗАЛІКОВОГО КРЕДИТУ

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td>Кількість кредитів – 5</td><td>Галузь знань 27 «Транспорт»</td><td colspan="2">Фундаментальна дисципліна</td></tr>
<tr><td>Модулів – 1</td><td rowspan="5">Спеціальність 275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)»</td><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 2</td><td>3-й</td><td>5-й</td></tr>
<tr><td>Індивідуальне науково-дослідне завдання: не передбачене</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин – 150</td><td>5-й</td><td>9-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних – 4
самостійної роботи студента – 6</td><td rowspan="9">Рівень вищої освіти:
бакалавр</td><td>30 год.</td><td>2 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські</td></tr>
<tr><td>30 год.</td><td>10 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>90 год.</td><td>138 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Індивідуальні завдання:
-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю:
екзамен</td></tr>
</table>

Примітка.

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить (%):

- для денної форми навчання – 66,7%;
- для заочної форми навчання – 8,7%.

2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ В ДОСЛІДЖЕННІ ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ

Практичне заняття 8

Тема: Одноканальні системи масового обслуговування.

Мета заняття: навчитися розраховувати параметри одноканальної системи масового обслуговування з відмовами.

Норма часу (за навчальною програмою): 2 год.

Завдання до виконання практичної роботи

Задача 1.

На автомийці є один блок для обслуговування і місця для черги. Автомобілі прибувають згідно пуассонівського розподілу з інтенсивністю n авто/годину. Середній час обслуговування одного автомобіля становить $(10+m)$ хвилин.

Визначити в сталому режимі граничні значення:

- відносної пропускної здатності q;
- абсолютної пропускної здатності A;
- імовірності відмов $P_{відм}$;

Порівняти фактичну пропускну здатність СМО з номінальною, котра була б, якби кожен автомобіль обслуговувався точно $(10+m)$ хвилин і автомобілі надходили один за другим без перерви.

Задача 2.

На автомийці один блок для обслуговування. Автомобілі прибувають згідно пуассонівського розподілу з інтенсивністю n авто/годину. Середній час обслуговування однієї машини становить $(10+m)$ хвилин. Знайти ймовірність того, що під’їхав автомобіль знайде систему зайнятою, якщо СМО працює в стаціонарному режимі.

Примітка: m *і* n − відповідно передостання та остання цифри залікової книжки студента.

Вказівки до розв'язання практичного завдання 8

Розглянемо розрахунок параметрів одноканальної системи масового обслуговування з відмовами на прикладах.

Приклад №1. *Моделювання одноканальної СМО з пуасонівським вхідним потоком та експоненціальним розподілом тривалості обслуговування.*

Нехай одноканальна СМО з відмовами являє собою один пост для миття автомобілів. Заявка - автомобіль, що прибув у момент, коли пост зайнятий, - отримує відмову в обслуговуванні. Інтенсивність потоку автомобілів $\lambda = 1$ (один автомобіль на годину). Середня тривалість обслуговування - 1,8 години. Потік автомобілів і потік обслуговування є найпростішими.

Визначити в сталому режимі граничні значення:

- відносної пропускної здатності q;
- абсолютної пропускної здатності A;
- імовірності відмов $P_{відм}$;

Порівняти фактичну пропускну здатність СМО з номінальною, котра була б, якби кожен автомобіль обслуговувався точно 1,8 години і автомобілі надходили один за другим без перерви.

Розв'язання.

1. Визначимо інтенсивність потоку обслуговування:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1,8} = 0,555 .$$

2. Обчислимо відносну пропускну здатність:

$$q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{0,555}{1 + 0,555} = 0,356 .$$

Величина q означає, що в сталому режимі система буде обслуговувати приблизно 35% автомобілів, які надходять на пост миття.

3. Абсолютну пропускну здатність визначимо за формулою:

$$A = \lambda q = 1 \cdot 0,356 = 0,356 .$$

Це означає, що система (пост миття) здатна здійснити в середньому 0,356 обслуговування автомобілів на годину.

4. Ймовірність відмови:

$$P_{відм} = 1 - q = 1 - 0,356 = 0,644 .$$

Це означає, що близько 65% автомобілів, що надійшли на пост миття одержать відмову в обслуговуванні.

5. Визначимо номінальну пропускну здатність системи:

$$A_{ном} = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1,8} = 0,555 \text{ (авт./год.)}.$$

Виявляється, що $A_{ном}$ у 1,5 рази $\left(\frac{0,555}{0,356} \approx 1,5\right)$ більша, ніж фактична пропускна здатність, обчислена з врахуванням випадкового характеру потоку заявок і часу обслуговування.

Приклад №2. *Моделювання одноканальної СМО з очікуванням*

Станція попутного завантаження автопоїздів представляє собою одноканальну СМО. Число стоянок для автомобілів, що очікують завантаження, обмежено і дорівнює 3. Якщо всі стоянки зайняті, тобто в черзі вже знаходиться три автомобілі, то черговий автомобіль, що прибув на завантаження, у чергу на обслуговування не стає. Потік автомобілів, що прибувають на завантаження, розподілений за законом Пуассона і має інтенсивність $\lambda = 0,85$ (автомобіля за годину). Час навантаження автомобіля розподілено за показниковим законом і у середньому дорівнює 1,05 години.

Потрібно визначити імовірнісні характеристики станції попутного завантаження, що працює в стаціонарному режимі.

Розв'язання.

1. Параметр потоку обслуговування автомобілів:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1,05} = 0,952$$

2. Приведена інтенсивність потоку автомобілів визначається як відношення інтенсивностей λ та μ, тобто:

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,85}{0,952} = 0,893.$$

3. Обчислимо фінальні імовірності системи:

$$P_0 = \frac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}} = \frac{1-0,893}{1-0,893^5} \approx 0,248; \; P_1 = \psi P_0 = 0,893 \cdot 0,248 \approx 0,221;$$

$$P_2 = \psi^2 P_0 = 0,893^2 \cdot 0,248 \approx 0,198; \; P_3 = \psi^3 P_0 = 0,893^3 \cdot 0,248 \approx 0,177;$$

$$P_4 = \psi^4 P_0 = 0,893^4 \cdot 0,248 \approx 0,158.$$

4. Імовірність відмови в обслуговуванні автомобіля:

$$P_{відм} = P_4 = \psi^4 P_0 \approx 0,158.$$

5. Відносна пропускна здатність поста завантаження:

$$q = 1 - P_{відм} = 1 - 0{,}158 = 0{,}842\,.$$

6. Абсолютна пропускна здатність поста завантаження:

$A = q\lambda = 0{,}842 \cdot 0{,}85 = 0{,}716$ (авт./год.)

7. Середнє число автомобілів, що знаходяться на обслуговуванні й у черзі (тобто в системі масового обслуговування):

$$L_s = \frac{\psi\left[1-(N+1)\psi^N + N\psi^{N+1}\right]}{(1-\psi)(1-\psi^{N+1})} = \frac{0{,}893\cdot\left[1-(4+1)\cdot 0{,}893^4 + 4\cdot 0{,}893^5\right]}{(1-0{,}893)(1-0{,}893^5)} = 1{,}77$$

.

8. Середній час перебування автомобіля в системі:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)} = \frac{1{,}77}{0{,}85(1-0{,}158)} \approx 2{,}473 \text{ години.}$$

9. Середня тривалість перебування заявки в черзі на обслуговування:

$$W_q = W_S - \frac{1}{\mu} = 2{,}473 - \frac{1}{0{,}952} = 1{,}423 \text{ години.}$$

10. Середнє число заявок у черзі (довжина черги):

$$L_q = \lambda(1-P_N)W_q = 0{,}85\cdot(1-0{,}158)\cdot 1{,}423 = 1{,}02\,.$$

Роботу розглянутого поста завантаження можна вважати задовільною, тому що пост не обслуговує автомобілі в середньому в 15,8% випадків ($P_{відм} = 0{,}158$).

Приклад №3. *Моделювання одноканальної СМО з очікуванням без обмеження на довжину черги.*

В постановці прикладу №2 зробимо наступні припущення.

Нехай розглянутий пост завантаження має у своєму розпорядженні необмежену кількість площадок для стоянки прибуваючих на обслуговування автомобілів, тобто довжина черги не обмежена.

Визначити фінальні значення наступних ймовірнісних характеристик:

- ймовірності станів системи (поста завантаження);
- середнє число автомобілів, що знаходяться в системі (на обслуговуванні й у черзі);
- середню тривалість перебування автомобіля в системі (на обслуговуванні й у черзі);
- середнє число автомобілів у черзі на обслуговування;
- середню тривалість перебування автомобіля в черзі.

Розв'язання.

1. Параметр потоку обслуговування μ та приведена інтенсивність потоку автомобілів ψ визначені в прикладі №2:

$\mu = 0{,}952$;

$\psi = 0{,}893$.

2. Обчислимо граничні ймовірності системи:

$P_0 = 1 - \psi = 1 - 0{,}893 = 0{,}107$;

$P_1 = (1-\psi)\psi = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893 = 0{,}096$;

$P_2 = (1-\psi)\psi^2 = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893^2 = 0{,}085$; $P_3 = 0{,}076$;

$P_4 = 0{,}068$;

$P_5 = 0{,}061$, і т.д.

Слід зазначити, що $P_0(t)$ визначає частку часу, протягом якого пост навантаження вимушено не діє (простоює). У нашому прикладі вона складає 10,7%, оскільки $P_0(t) = 0{,}107$.

3. Середнє число автомобілів, що знаходяться в системі (на обслуговуванні й у черзі):

$$L_s = \frac{\psi}{1-\psi} = \frac{0{,}893}{1-0{,}893} = 8{,}346 \text{ автомобілів.}$$

4. Середня тривалість перебування автомобіля в системі:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\psi)} = \frac{1}{0{,}952\cdot(1-0{,}893)} = 9{,}817 \text{ годин.}$$

5. Середнє число автомобілів у черзі на обслуговування:

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\psi^2}{1-\psi} = \frac{0{,}893^2}{1-0{,}893} = 7{,}453.$$

6. Середня тривалість перебування автомобіля в черзі:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\psi}{\mu(1-\psi)} = \frac{0{,}893}{0{,}952\cdot(1-0{,}893)} = 8{,}766 \text{ годин.}$$

7. Відносна пропускна здатність системи: $q = 1$,
тобто, кожна заявка, що прийшла в систему, буде обслужена.

8. Абсолютна пропускна здатність:

$A = \lambda q = 0{,}85 \cdot 1 = 0{,}85$.

Слід зазначити, що станцію, яка здійснює попутне завантаження автомобілів, насамперед цікавить кількість клієнтів, що відвідає пост навантаження при знятті обмеження на довжину черги.

Припустимо, у початковому варіанті кількість місць для стоянки прибуваючих автомобілів рівне трьом (див. приклад №2). Частота m виникнення ситуацій, коли автомобіль, який прибуває на пост не має можливості приєднатися до черги:

$$m = \lambda \psi^{N} P_0 .$$

Тобто, при $N = 3 + 1 = 4$ і $\psi = 0{,}893$:

$$m = 0{,}85 \cdot 0{,}248 \cdot 0{,}893^{4} = 0{,}134 \text{ авт./год.}$$

При 12-годинному режимі роботи поста навантаження це еквівалентно тому, що пост в середньому за зміну (день) буде втрачати $12 \cdot 0{,}134 = 1{,}6$ автомобіля.

Зняття обмеження на довжину черги дозволяє збільшити кількість обслужених клієнтів (у нашому прикладі в середньому на 1,6 автомобіля за зміну (12 годин роботи) поста навантаження). Рішення щодо розширення площі для стоянки автомобілів, що прибувають на пост завантаження, повинне ґрунтуватися на оцінці економічного збитку, що обумовлений втратою клієнтів при наявності всього трьох місць для стоянки цих автомобілів.

Практичне заняття 9

Тема: Багатоканальні системи масового обслуговування з відмовами.

Мета заняття: навчитися розраховувати параметри багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами

Норма часу (за навчальною програмою): 2 год.

Завдання до виконання практичної роботи

Задача 3.

Нехай n-канальна СМО являє собою централізований склад (ЦС) по обробці вантажів в контейнерах із п'ятьма ($n = 5$) взаємозамінними навантажувачами для обробки вантажів. Потік вантажів в контейнерах, що надходять на ЦС, має інтенсивність λ контейнер на годину. Середня тривалість обслуговування $\bar{t}_{об}$ години. Потік заявок на обробку вантажів і потік обслуговування цих вантажів вважати найпростішими.

Обчислити фінальні значення: ймовірності станів ЦС; ймовірності відмов в обслуговуванні заявки; відносної пропускної здатності ЦС; абсолютної пропускної здатності ЦС; середнього числа зайнятих навантажувачів на ЦС.

Визначити, скільки додатково треба придбати навантажувачів, щоб збільшити пропускну здатність ЦС у 5 разів. Результати розрахунків оформити у вигляді таблиці. Початкові дані наведені у табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Початкові дані до задачі 3

№ вар.	Показники			№ вар.	Показники	
	λ	$\bar{t}_{об}$			λ	$\bar{t}_{об}$
1	2	3		1	2	3
1.	0,5	2		16.	0,5	1,5
2.	0,9	1		17.	0,3	1,4
3.	0,5	1,5		18.	0,6	1,3
4.	0,3	1,4		19.	0,8	1,2
5.	0,6	1,3		20.	0,9	1,5
6.	0,8	1,2		21.	0,4	2
7.	0,9	1,5		22.	0,6	1,9
8.	0,4	2		23.	0,5	1,4
9.	0,6	1,9		24.	1	1,1
10.	0,5	1,4		25.	1,1	1,6
11.	1	1,1		26.	0,7	1,7
12.	1,1	1,6		27.	1,2	1,8
13.	0,7	1,7		28.	0,9	1
14.	1,2	1,8		29.	0,5	1,5
15.	0,9	1		30.	0,3	1,4

Вказівки до розв’язання практичного завдання 9

Розглянемо розрахунок параметрів багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами на прикладах.

Приклад №4. *Моделювання багатоканальної СМО з пуасонівським вхідним потоком і експоненціальним розподілом* *тривалості обслуговування.*

Нехай n-канальна СМО являє собою централізований склад (ЦС) по обробці вантажів в контейнерах із трьома ($n = 3$) взаємозамінними навантажувачами для обробки вантажів. Потік вантажів в контейнерах, що надходять на ЦС, має інтенсивність $\lambda = 1$ контейнер на годину. Середня тривалість обслуговування $\bar{t}_{об} = 1,8$ години. Потік заявок на обробку вантажів і потік обслуговування цих вантажів вважати найпростішими.

Обчислити фінальні значення:

- ймовірності станів ЦС;
- ймовірності відмов в обслуговуванні заявки;
- відносної пропускної здатності ЦС;
- абсолютної пропускної здатності ЦС;
- середнього числа зайнятих навантажувачів на ЦС.

Визначити, скільки додатково треба придбати навантажувачів, щоб збільшити пропускну здатність ЦС у 10 разів.

Розв'язання.

1. Визначимо параметр μ потоку обслуговування:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1,8} = 0,555 .$$

2. Приведена інтенсивність потоку заявок

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0,555} = 1,8 .$$

3. Граничні імовірності станів знайдемо за формулами Ерланга:

$$P_1 = \frac{\psi}{1!} P_0 = 1,8 P_0 ; \quad P_2 = \frac{\psi^2}{2!} P_0 = 1,62 P_0 ; \quad P_3 = \frac{\psi^3}{3!} P_0 = 0,97 P_0 .$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{3} \frac{\psi^k}{k!}} = \frac{1}{1 + 1,8 + 1,62 + 0,97} \approx 0,18 ;$$

$$P_1 \approx 1,8 \cdot 0,186 \approx 0,344 ; \quad P_2 \approx 1,62 \cdot 0,186 \approx 0,301 ;$$

$$P_3 \approx 0,97 \cdot 0,186 \approx 0,18 .$$

4. Ймовірність відмови в обслуговуванні заявки:

$$P_{відм} = P_3 = 0,18 .$$

5. Відносна пропускна здатність ЦС:

$$q = 1 - P_{відм} = 1 - 0,18 = 0,82 .$$

6. Абсолютна пропускна здатність ЦС:

$A = \lambda q = 1 \cdot 0{,}82 = 0{,}82$.

7. Середнє число зайнятих каналів – навантажувачів:

$\bar{k} = \psi(1 - P_{відм}) = 1{,}8 \cdot (1 - 0{,}18) = 1{,}476$.

Таким чином, при сталому режимі роботи СМО в середньому буде зайнято 1,5 навантажувача з трьох - інші півтора будуть простоювати.

Очевидно, що пропускну здатність ЦС при даних λ та μ можна збільшити тільки за рахунок збільшення числа навантажувачів.

Визначимо, скільки потрібно використовувати навантажувачів, для скорочення числа не обслужених заявок, що надходять на ЦС, у 10 разів, тобто щоб імовірність відмови в обробці вантажів не перевершувала 0,0180. Для цього використовуємо виконаємо перерахунок: $P_{відм} = P_n = \frac{\psi^n}{n!} P_0$, а результати розрахунків наводимо в табл. 9.2.

Таблиця 9.2

Результати розрахунку характеристик багатоканальної СМО

n	1	2	3	4	5	6
P_0	0,357	0,266	0,186	0,172	0,167	0,166
$P_{відм}$	0,643	0,367	0,18	0,075	0,026	0,0078

Практичне заняття 10

Тема: Системи масового обслуговування з очікуванням та обмеженням на довжину черги.

Мета заняття: навчитися розраховувати параметри системи масового обслуговування з очікуванням та обмеженням на довжину черги

Норма часу (за навчальною програмою): 2 год.

Завдання до виконання практичної роботи

Задача 4.

На автозаправній станції (АЗС) є одна колонка. Майданчик при станції, на якій машини очікують заправку, може вмістити не більше трьох машин одночасно, і якщо вона зайнята, то чергова машина, яка прибула до станції, в чергу не стає , а проїжджає на сусідню станцію. У середньому машини прибувають на станцію кожні a хв. Процес заправки однієї машини триває в середньому b хв.

Визначити: ймовірність відмови; відносну і абсолютну пропускні здатності СМО; середню кількість автомобілів, що очікують заправки; середній час очікування машини в черзі; середній час перебування машини на АЗС (включаючи обслуговування).

Початкові дані наведені у таблиці 10.1.

Таблиця 10.1

Початкові дані до задачі 4

№ вар.	Показники		№ вар.	Показники	
	a	b		a	b
1	2	3	1	2	3
1.	1	2	16.	6	5
2.	1,5	3	17.	6,5	6
3.	2,5	4	18.	7	6
4.	3	2	19.	7,5	6
5.	2	3	20.	8	7
6.	2,4	4	21.	9	7
7.	2,8	3	22.	9,5	8
8.	3,2	3	23.	10	8
9.	2,6	2	24.	4,8	5
10.	3,5	3	25.	5,2	4
11.	4	3	26.	6,2	7
12.	4,5	4	27.	5	6
13.	5	4	28.	7	4
14.	5,5	5	29.	4	6
15.	6	5	30.	2	5

Задача 5.

В умовах задачі 4 збільшимо кількість колонок до двох. Майданчик при станції, на якій машини очікують заправку, вміщає не більше трьох машин одночасно, і якщо він зайнятий, то чергова машина, яка прибула до станції, в чергу не стає, а проїжджає на сусідню станцію.

Визначити: ймовірність того, що обидві колонки вільні; ймовірність відмови; відносну і абсолютну пропускну здатності СМО; середню кількість машин, що знаходяться під обслуговуванням; середнє число машин, що очікують заправки; середнє число машин на станції (під обслуговуванням і в черзі); середній час очікування машини в черзі; середній час перебування машини на АЗС (включаючи обслуговування).

Зробити висновки. Початкові дані наведені у таблиці 10.1.

Вказівки до розв'язання практичного завдання 10

Розглянемо багатоканальну систему масового обслуговування з очікуванням. Процес масового обслуговування при цьому характеризуються наступним: вхідний і вихідний потоки є пуасонівськими з інтенсивностями λ та μ відповідно; паралельно обслуговуватися можуть не більше S клієнтів. Система має S каналів обслуговування.

Розглянемо розрахунок параметрів системи масового обслуговування з очікуванням та обмеженням на довжину черги на прикладах.

Приклад №5. На автозаправній станції (АЗС) є одна колонка. Майданчик при станції, на якій машини очікують заправку, може вмістити не більше трьох машин одночасно, і якщо вона зайнята, то чергова машина, яка прибула до станції, в чергу не стає , а проїжджає на сусідню станцію. У середньому машини прибувають на станцію кожні 2 хв. Процес заправки однієї машини триває в середньому 2,5 хв. Визначити:

1) ймовірність відмови;
2) відносну і абсолютну пропускні здатності СМО;
3) середню кількість автомобілів, що очікують заправки;
4) середній час очікування машини в черзі;
5) середній час перебування машини на АЗС (включаючи обслуговування).

Розв'язання.

Математичною моделлю даної АЗС є одноканальна СМО з очікуванням і обмеженням на довжину черги ($m = 3$).

Передбачається, що потік машин, що під'їжджають до АЗС для заправки, і потік обслуговувань - найпростіші.

Оскільки машини прибувають в середньому через кожні 2 хв., то інтенсивність вхідного потоку дорівнює $\lambda = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (автомобілів за хвилину). Середній час обслуговування одного автомобіля $\overline{T}_{об} = 2{,}5$ хв., отже, інтенсивність потоку обслуговувань $\mu = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$ (автомобіля за хвилину).

Визначаємо показник навантаження СМО:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}5}{0{,}4} = 1{,}25 \cdot$$

Ймовірність відмови:

$$p_{відм} = \frac{1{,}25^4 (1-1{,}25)}{(1-1{,}25^5)} = \frac{2{,}441(-0{,}25)}{(-3{,}052)} = 0{,}297 \cdot$$

Відносна пропускна здатність:

$$Q = 1 - p_{відм} = 1 - 0{,}297 = 0{,}703 .$$

Абсолютна пропускна здатність:

$$A = \lambda Q = 0{,}5 \cdot 0{,}703 = 0{,}352 .$$

Середня кількість автомобілів, які очікують в черзі на заправку:

$$\overline{N}_{оч} = \frac{1{,}25^2 \left[1 - 1{,}25^3 (3 + 1 - 3 \cdot 1{,}25)\right]}{\left[(1-1{,}25^5)(1-1{,}25)\right]} = 1{,}559 \cdot$$

Середня кількість автомобілів під обслуговуванням:

$$\overline{N}_{об} = \rho Q = 1{,}25 \cdot 0{,}703 = 0{,}879 .$$

Середня кількість автомобілів, пов'язаних з АЗС (тих, що знаходяться в системі):

$$\overline{N}_{сис} = \overline{N}_{оч} + \overline{N}_{об} = 1{,}559 + 0{,}879 = 2{,}438 .$$

Середній час очікування автомобіля в черзі:

$$\overline{T}_{оч} = \frac{\overline{N}_{оч}}{\lambda} = \frac{1{,}559}{0{,}5} = 3{,}118 \cdot$$

Середній час, витрачений одним автомобілем на АЗС:

$$\overline{T}_{сис} = \frac{\overline{N}_{сис}}{\lambda} = \frac{2{,}438}{0{,}5} = 4{,}876 .$$

Середній час обслуговування одного автомобіля, має відношення до всіх автомобілів – обслужених і не обслужених:

$$\overline{T}_{\hat{\imath}\acute{a}}^{\forall} = \frac{\overline{N}_{\hat{\imath}\acute{a}}}{\lambda} = \frac{0,879}{0,5} = 1,758 .$$

Таким чином, з аналізу роботи СМО випливає, що з кожних 100 машин, що під’їжджали, 30 отримує відмову ($p_{\hat{a}^{3}\ddot{a}\grave{\imath}} = 0,297 = 29,7\,\%$), тобто обслуговуються $\dfrac{2}{3}$ заявок. Тому, необхідно скоротити час обслуговування однієї машини (збільшити інтенсивність потоку обслуговувань), або збільшити число колонок, чи збільшити майданчик для очікування. Оптимальне рішення приймається з урахуванням витрат, пов'язаних відповідно з збільшенням штату обслуговуючого персоналу (збільшення продуктивності каналу), з розширенням майданчика для очікування або придбання додаткової колонки, і втрат, пов'язаних з втратою заявок на обслуговування.

Приклад №6. В умові прикладу №5 збільшимо кількість колонок до двох. Майданчик при станції, на якій машини очікують заправку, вміщає не більше трьох машин одночасно, і якщо він зайнятий, то чергова машина, яка прибула до станції, в чергу не стає, а проїжджає на сусідню станцію. Машини прибувають на станцію з інтенсивністю $\lambda = 0,5$ автомобілів за хвилину. Інтенсивність процесу обслуговування $\mu = 0,4$ автомобілів за хвилину. Визначити:

1) ймовірність того, що обидві колонки вільні;

2) ймовірність відмови;

3) відносну і абсолютну пропускну здатності СМО;

4) середню кількість машин, що знаходяться під обслуговуванням;

5) середнє число машин, що очікують заправки;

6) середнє число машин на станції (під обслуговуванням і в черзі);

7) середній час очікування машини в черзі;

8) середній час перебування машини на АЗС (включаючи обслуговування).

Розв’язання.

Математичною моделлю даної АЗС є двохканальна СМО (n = 2) з очікуванням і обмеженням на довжину черги (m = 3). Передбачається, що потік машин, що під'їжджають до АЗС для заправки, і потік обслуговувань - найпростіші. Інтенсивність вхідного потоку $\lambda = 0,5$ автомобілів за хвилину Інтенсивність потоку обслуговувань $\mu = 0,4$ автомобілів за хвилину Визначаємо показник завантаження СМО:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,5}{0,4} = 1,250 \text{ (ерланга).}$$

Тоді показник навантаження, що припадає на один канал:

$$\psi = \frac{\rho}{n} = \frac{1,250}{2} = 0,625 \text{ (ерланга).}$$

Тому, ймовірність простою системи (тобто ймовірність того, що обидві колонки вільні), для випадку $\psi \neq 1$, буде рівна

$$p_0 = \left\{1 + \left(\frac{2}{1!}\right) \cdot 0,625 + \left(\frac{2^2}{2!}\right) \cdot 0,625^2 + \left(\frac{2^2}{2!}\right) \cdot \left[\frac{0,625^3 \; 1-0,625^3}{1-0,625}\right]\right\}^{-1} = 0,249.$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні дорівнює:

$$p_{â³äì} = p_{n+m} = \frac{2^2}{2!} \cdot 0,625^5 \cdot 0,249 = 0,047.$$

Відносна пропускна здатність СМО:

$$Q = 1 - 0,047 = 0,953.$$

Абсолютна пропускна здатність:

$$A = 0,5 \cdot 0,953 = 0,477.$$

Знаходимо середнє число машин, що знаходяться під обслуговуванням:

$$\overline{N}_{îá} = \rho Q = 1,25 \cdot 0,953 = 1,191.$$

Середня кількість машин, що очікують заправки (середнє число заявок в черзі), визначаємо для випадку $\psi \neq 1$:

$$\overline{N}_{î÷} = \left(\frac{2^2}{2!}\right) \cdot 0,625^3 \cdot \left[\frac{1 - 4 \cdot 0,625^3 + 3 \cdot 0,625^4}{1-0,625^{\;2}}\right] \cdot 0,249 = 0,414.$$

Загальна кількість машин на станції, тобто під обслуговуванням і в черзі (число заявок в системі) дорівнює сумі:

$$\overline{N}_{сис} = \overline{N}_{об} + \overline{N}_{оч} = 1{,}191 + 0{,}414 = 1{,}605.$$

Останні дві характеристики знаходимо за формулами Літтла:

- середній час очікування машини в черзі

$$\overline{T}_{оч} = \frac{0{,}414}{0{,}5} = 0{,}828 \text{ (хв.)};$$

- середній час перебування машини на АЗС (включаючи обслуговування)

$$\overline{T}_{сис} = \frac{1{,}605}{0{,}5} = 3{,}210 \text{ (хв.)}.$$

Таким чином, порівнюючи характеристики даної системи, з характеристиками системи прикладу №5 (одноканальної СМО), бачимо, що збільшення кількості каналів обслуговування призводить до значного зменшення втрат, пов'язаних з втратою клієнтів (ймовірність відмови зменшилася в 6 разів). Збільшення кількості каналів призвело також до скорочення часу очікування в черзі і на заправці в цілому.

Практичне заняття 11

Тема: Системи масового обслуговування з очікуванням.

Мета заняття: навчитися розраховувати параметри системи масового обслуговування з очікуванням

Норма часу (за навчальною програмою): 2 год.

Завдання до виконання практичної роботи

Задача 6.

Механічна майстерня заводу з трьома постами виконує ремонт малої механізації. Потік несправних механізмів, що прибувають у майстерню - пуасонівський і має інтенсивність λ механізми за добу, середній час ремонту одного механізму розподілено за показниковим законом і дорівнює $\bar{t}_{об}$ доби. Припустимо, що іншої майстерні на заводі немає, і, отже, черга механізмів перед майстернею може рости практично необмежено.

Обчислити наступні граничні значення імовірнісних характеристик системи: імовірності станів системи; середнє число заявок у черзі на обслуговування; середнє число заявок, що знаходяться в системі; середню тривалість перебування заявки в черзі; середню тривалість перебування заявки в системі. Початкові дані наведені у таблиці 11.1.

Таблиця 11.1

Початкові дані до задачі 6

№ вар.	Показники			№ вар.	Показники	
	λ	$\bar{t}_{об}$			λ	$\bar{t}_{об}$
1	2	3		1	2	3
1.	0,5	2		16.	0,5	1,5
2.	0,9	1		17.	0,3	1,4
3.	0,5	1,5		18.	0,6	1,3
4.	0,3	1,4		19.	0,8	1,2
5.	0,6	1,3		20.	0,9	1,5
6.	0,8	1,2		21.	0,4	2
7.	0,9	1,5		22.	0,6	1,9
8.	0,4	2		23.	0,5	1,4
9.	0,6	1,9		24.	1	1,1
10.	0,5	1,4		25.	1,1	1,6
11.	1	1,1		26.	0,7	1,7
12.	1,1	1,6		27.	1,2	1,8
13.	0,7	1,7		28.	0,9	1
14.	1,2	1,8		29.	0,5	1,5
15.	0,9	1		30.	0,3	1,4

Вказівки до розв’язання практичного завдання 11

Розглянемо розрахунок параметрів системи масового обслуговування з очікуванням на прикладі.

Приклад №7. *Моделювання багатоканальної СМО з очікуванням*

Механічна майстерня заводу з трьома постами виконує ремонт малої механізації. Потік несправних механізмів, що прибувають у майстерню - пуасонівський і має інтенсивність $\lambda = 2{,}5$ механізми за добу, середній час ремонту одного механізму розподілено за показниковим законом і дорівнює $\bar{t}_{об} = 0{,}5$ доби. Припустимо, що іншої майстерні на заводі немає, і, отже, черга механізмів перед майстернею може рости практично необмежено.

Обчислити наступні граничні значення імовірнісних характеристик системи: імовірності станів системи; середнє число заявок у черзі на обслуговування; середнє число заявок, що знаходяться в системі; середню тривалість перебування заявки в черзі; середню тривалість перебування заявки в системі.

Розв'язання.

1. Визначимо параметр потоку обслуговувань:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{0{,}5} = 2\ .$$

2. Приведена інтенсивність потоку заявок:

$\psi = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{2{,}5}{2} = 1{,}25$, причому: $\dfrac{\lambda}{\mu S} = \dfrac{2{,}5}{2 \cdot 3} = 0{,}41$.

Оскільки $\dfrac{\lambda}{\mu S} < 1$, то черга не росте безмежно, і у системі настає граничний стаціонарний режим роботи.

3. Обчислимо імовірності станів системи:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^S}{S!\left[1 - \frac{\psi}{S}\right]} \right\}^{-1} = \frac{1}{1 + 1{,}25 + \frac{1{,}25^2}{2} + \frac{1{,}25^3}{6\left(1 - \frac{1{,}25}{3}\right)}} = 0{,}279$$

.

$$P_1 = \frac{\psi^1}{1!} P_0 = 1{,}25 \cdot 0{,}279 = 0{,}349\,;$$

$$P_2 = \frac{\psi^2}{2!} P_0 = \frac{1{,}25^2}{2!} \cdot 0{,}279 = 0{,}218\,;$$

$$P_3 = \frac{\psi^3}{3!} P_0 = \frac{1{,}25^3}{3!} \cdot 0{,}279 = 0{,}091\,;$$

$$P_4 = \frac{\psi^4}{4!} P_0 = \frac{1{,}25^4}{4!} \cdot 0{,}279 = 0{,}028 .$$

4. Ймовірність відсутності черги в майстерні:

$$P_{відс.черг} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \approx 0{,}279 + 0{,}349 + 0{,}218 + 0{,}091 = 0{,}937 .$$

5. Середнє число заявок у черзі на обслуговування:

$$L_q = \left[\frac{S\psi}{(S-\psi)^2} \right] P_S = \frac{3 \cdot 1{,}25}{(3-1{,}25)^2} 0{,}091 = 0{,}111 .$$

6. Середнє число заявок, що знаходяться в системі:

$$L_S = L_q + \psi = 0{,}111 + 1{,}25 = 1{,}361 .$$

7. Середня тривалість перебування механізму в черзі на обслуговування:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0{,}111}{2{,}5} = 0{,}044 \text{ доби.}$$

8. Середня тривалість перебування механізму в майстерні (у системі):

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu} = 0{,}044 + \frac{1}{2} = 0{,}544 \text{ доби.}$$

Практичне заняття 12

Тема: Замкнуті системи масового обслуговування.

Мета заняття: навчитися розраховувати параметри замкнутої системи масового обслуговування

Норма часу (за навчальною програмою): 2 год.

Завдання до виконання практичної роботи

Задача 7.

Нехай для обслуговування десяти автопоїздів (АП) виділено два механіки з однаковою продуктивністю праці. Потік відмов (несправностей) одного автопоїзда - пуасонівський з інтенсивністю λ. Час обслуговування АП розподілений за показниковим законом. Середній час обслуговування одного АП одним механіком складає: $\bar{t}_{об}$ години.

Можливі наступні варіанти організації обслуговування:

- обоє механіки обслуговують усі десять автопоїздів, так що при відмові АП його обслуговує один з вільних механіків;

- кожний із двох механіків обслуговує по п'ять закріплених за ним АП.

Вибрати найкращий варіант організації обслуговування автопоїздів.

Початкові дані наведені у табл. 12.1.

Таблиця 12.1

Початкові дані до задачі 7

№ вар.	Показники			№ вар.	Показники	
	λ	$\bar{t}_{об}$			λ	$\bar{t}_{об}$
1	2	3		1	2	3
1.	0,5	2		16.	0,5	1,5
2.	0,9	1		17.	0,3	1,4
3.	0,5	1,5		18.	0,6	1,3
4.	0,3	1,4		19.	0,8	1,2
5.	0,6	1,3		20.	0,9	1,5
6.	0,8	1,2		21.	0,4	2
7.	0,9	1,5		22.	0,6	1,9
8.	0,4	2		23.	0,5	1,4
9.	0,6	1,9		24.	1	1,1
10.	0,5	1,4		25.	1,1	1,6
11.	1	1,1		26.	0,7	1,7
12.	1,1	1,6		27.	1,2	1,8
13.	0,7	1,7		28.	0,9	1
14.	1,2	1,8		29.	0,5	1,5
15.	0,9	1		30.	0,3	1,4

Вказівки до розв’язання практичного завдання 12

Розглянемо розрахунок параметрів замкнутої системи масового обслуговування на прикладі.

Приклад №7. *Моделювання замкнутої СМО.*

Нехай для обслуговування десяти автопоїздів (АП) виділено два механіки з однаковою продуктивністю праці. Потік відмов (несправностей) одного автопоїзда - пуасонівський з інтенсивністю

$\lambda = 0{,}2$. Час обслуговування АП розподілений за показниковим законом. Середній час обслуговування одного АП одним механіком складає: $\bar{t}_{об} = 1{,}25$ години.

Можливі наступні варіанти організації обслуговування:

- обоє механіки обслуговують усі десять автопоїздів, так що при відмові АП його обслуговує один з вільних механіків, у цьому випадку R = 2, N = 10;

- кожний із двох механіків обслуговує по п'ять закріплених за ним АП. У цьому випадку R = 1, N = 5.

Вибрати найкращий варіант організації обслуговування автопоїздів.

Розв'язання.

1. Обчислимо параметр обслуговування:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8 .$$

2. Приведена інтенсивність:

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25 .$$

3. Обчислимо ймовірнісні характеристики СМО для двох варіантів організації обслуговування автопоїздів.

Варіант 1.

1. Визначимо ймовірності станів системи:

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{N!\,\psi^k}{k!\,(N-k)!} P_0, & 1 \le k < R \\[2ex] \dfrac{N!\,\psi^k}{R!\,R^{k-R}\,(N-k)!} P_0, & R \le k \le N \end{cases};$$

$$P_1 = \frac{10! \cdot 0{,}25^1}{1! \cdot (10-1)!} \cdot P_0 = 2{,}5 \cdot P_0; \quad P_2 = 2{,}812 \cdot P_0; \quad P_3 = 2{,}812 \cdot P_0;$$

$$P_4 = 2{,}461 \cdot P_0; \quad P_5 = 1{,}864 \cdot P_0; \quad P_6 = 1{,}154 \cdot P_0;$$

$$P_7 = 0{,}577 \cdot P_0;$$

$$P_8 = 0{,}216 \cdot P_0; \quad P_9 = 0{,}054 \cdot P_0; \quad P_{10} = 0{,}007 \cdot P_0 .$$

З огляду на те, що $\sum_{k=0}^{N} P_k = 1$, і використовуючи результати розрахунку P_k, обчислимо P_0:

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = P_0 + 2{,}5P_0 + 2{,}812P_0 + 2{,}812P_0 + \ldots + 0{,}007P_0 = 1\,.$$

Звідки $P_0 = 0{,}065$.

Тоді: $P_1 \approx 0{,}162$; $P_2 \approx 0{,}183$; $P_3 \approx 0{,}183$; $P_4 \approx 0{,}16$; $P_5 \approx 0{,}11$; $P_6 \approx 0{,}075$; $P_7 \approx 0{,}037$; $P_8 \approx 0{,}014$; $P_9 \approx 0{,}003$; $P_{10} \approx 0{,}000$.

- Визначимо середнє число автопоїздів у черзі на обслуговування:

$$L_q = \sum_{k=R}^{N}(k-R)P_k = 0 + (3-2)\cdot 0{,}182 + (4-2)\cdot 0{,}16 + (5-2)\cdot 0{,}11 +$$
$$+ (6-2)\cdot 0{,}075 + (7-2)\cdot 0{,}037 + (8-2)\cdot 0{,}014 + (9-2)\cdot 0{,}003 = 1{,}42$$

.

- Визначимо середнє число автопоїздів, що знаходяться в системі (на обслуговуванні й у черзі):

$$L_S = \sum_{R=1}^{N} kP_k = 1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + 3\cdot P_3 + 4\cdot P_4 + 5\cdot P_5 + 6\cdot P_6 + 7\cdot P_7 +$$
$$+ 8\cdot P_8 + 9\cdot P_9 + 10\cdot P_{10} = 0{,}162 + 2\cdot 0{,}183 + 3\cdot 0{,}183 + 4\cdot 0{,}16 + \quad .$$
$$+ 5\cdot 0{,}11 + 6\cdot 0{,}075 + 7\cdot 0{,}037 + 8\cdot 0{,}014 + 9\cdot 0{,}003 + 10\cdot 0 = 3{,}11$$

- Визначимо середнє число механіків, що простоюють через відсутність роботи:

$$\overline{R}_n = \sum_{k=0}^{R-1}(R-k)P_k = 2\cdot P_0 + (2-1)\cdot P_1 = 2\cdot 0{,}065 + 1\cdot 0{,}162 = 0{,}292\,.$$

- Коефіцієнт простою автопоїзда в черзі:

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} = \frac{1{,}42}{10} = 0{,}142\,.$$

- Коефіцієнт використання автопоїздів визначається за формулою:

$$\alpha_2 = 1 - \frac{L_S}{N} = 1 - \frac{3{,}11}{10} = 0{,}689\,.$$

- Коефіцієнт простою обслуговуючих механіків:

$$\alpha_3 = \frac{\overline{R}_n}{R} = \frac{0{,}292}{2} = 0{,}146\,.$$

- Середній час очікування АП обслуговування:

$$W_q = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\right) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}2}\cdot\frac{1-0{,}689}{0{,}689} - \frac{1}{0{,}8} = 1{,}01 \text{ години.}$$

Варіант 2.

Визначимо ймовірності станів системи:

$$P_1 = \frac{5!\cdot 0,25^1}{1!\cdot(5-1)!}\cdot P_0 = 1,25\cdot P_0;\quad P_2 = 1,25\cdot P_0;\quad P_3 = 0,938\cdot P_0;$$

$$P_4 = 2,461\cdot P_0;\qquad P_5 = 0,117\cdot P_0.$$

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = P_0 + 1,25P_0 + 1,25P_0 + 0,938P_0 + 0,469P_0 + 0,117P_0 = 1$$

Звідки: $P_0 = 0,199$.

Тоді: $P_1 \approx 0,249$; $P_2 \approx 0,249$; $P_3 \approx 0,187$; $P_4 \approx 0,093$; $P_5 \approx 0,023$.

Подальші розрахунки за другим варіантом організації робіт, проводимо аналогічно визначенню показників за варіантом 1.

Зведемо отримані результати за двома варіантами у табл. 12.2.

Таблиця 12.2

Результати розрахунків характеристик замкнутої СМО

Результуючі характеристики	Варіант організації робіт	
	1	2
α_1	0,142	0,199
α_2	0,689	0,64
α_3	0,146	0,199
W_q, годин	1,01	1,56

Таким чином, у варіанті 1 кожен автопоїзд перебуває в черзі в очікуванні початку його обслуговування приблизно 0,142 частини робочого часу, що менше аналогічного показника при організації робіт за варіантом 2. У варіанті 1 імовірність того, що АП у будь-який момент часу буде працювати вище, ніж у варіанті 2. Очевидно, варіант 1 організації робіт з обслуговування АП ефективніший, ніж варіант 2.

3. ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Розкрийте зміст основних понять теорії масового обслуговування.
2. Якими є вхідні характеристики системи масового обслуговування?
3. Якими показниками ефективності оцінюється використання систем масового обслуговування?
4. Що таке вартісна модель системи масового обслуговування?

5. Наведіть алгоритм побудови системи рівнянь Колмогорова.
6. Наведіть алгоритм побудови системи рівнянь для граничних ймовірностей по розміченому графу.
7. Охарактеризуйте експоненціальний розподіл.
8. Що таке модель чистого народження?
9. Охарактеризуйте Пуассонівський розподіл.
10. Що таке модель чистої загибелі?
11. Наведіть параметри одноканальної СМО з відмовами.
12. Дайте характеристику ефективності функціонування одноканальної СМО з відмовами.
13. Наведіть граничні характеристики ефективності функціонування одноканальної СМО з відмовами.
14. Запишіть систему диференціальних рівнянь Ерланга.
15. Що таке приведена інтенсивність вхідного потоку? Формула Літтла.
16. Опишіть параметри n-канальної СМО з відмовами.
17. Наведіть граничні характеристики ефективності функціонування n-канальної СМО з відмовами.
18. Дайте характеристику параметрів одноканальної СМО з очікуванням та обмеженням на довжину черги.
19. Опишіть граничні характеристики ефективності функціонування одноканальної СМО з очікуванням та обмеженням на довжину черги.
20. Охарактеризуйте параметри багатоканальної СМО з очікуванням та обмеженням на довжину черги.
21. Опишіть граничні характеристики ефективності функціонування багатоканальної СМО з очікуванням та обмеженням на довжину черги.
22. Дайте характеристику параметрів одноканальної СМО з очікуванням.
23. Що теке системи Енгсета?
24. Охарактеризуйте стани замкнутої СМО.
25. Яка залежність потоку заявок від станів замкнутої СМО?
26. Параметри замкнутої багатоканальної СМО.
27. Опишіть функціональні характеристики стаціонарних систем обслуговування.
28. Охарактеризуйте моделі масового обслуговування з одним сервісом.

29. Охарактеризуйте моделі масового обслуговування з паралельними сервісами.

30. Дайте характеристику моделі системи масового обслуговування з вартісними характеристиками.

4. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Катренко А. В. Дослідження операцій : підручник 2-ге вид., випр. та доп., за наук. ред. В. В. Пасічника. Львів : Магнолія, 2007. 480 с.
2. Охріменко М. Г., Дзюбан І. Ю. Дослідження операцій : навч. посібн. Київ : ЦНЛ, 2006. 184 с.
3. Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология : Учебное пособие для вузов. Москва : Дрофа, 2004. 208 с.
4. Таха Х. А. Введение в исследование операций : пер. с англ. Минько А. А. 7-е изд. Москва : Вильямс, 2005. 912 с.
5. Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О. Теория массового обслуживания в экономической сфере : учеб. пособ. Москва : Банки и биржи. ЮНИТИ, 1998. 319 с.